MINISTÈRES
ÉDUCATION
JEUNESSE
SPORTS
ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
RECHERCHE

Liberté
Égalité
Fraternité

LBE MAT 2

SESSION 2026

Δ

CAPES / CAPES-CAFEP
(BAC +3)
Concours externe

Section
MATHÉMATIQUES

Épreuve d'admissibilité 2

L'épreuve s'appuie sur plusieurs documents.
Le candidat est invité à analyser, critiquer, le cas échéant, compléter le contenu des documents en vue de répondre à la ou aux questions posées et de résoudre des exercices.
L'épreuve évalue les compétences disciplinaires.

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.
L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

Tournez la page S.V.P.

Ce sujet est formé de trois parties indépendantes et comporte deux documents joints.

Partie 1 : Exercices de critique et rédaction mathématique

Pour chacun des exercices ci-après une réponse est fournie.

1. Les réponses fournies sont-elles exactes ? Repérer les erreurs et critiquer la rédaction de chaque réponse proposée.
2. Rédiger avec soin une réponse correcte pour chacun des exercices proposés.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Réponse :

Si x est solution, en multipliant l'équation par x, on obtient $x^4 + x^3 + x^2 + x = 0$. Mais, $x^3 + x^2 + x = -1$, donc $x^4 = 1$. Il s'ensuit que les seules solutions de l'équation sont $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(x))^2 = 1.$$

Montrer que f est constante.

Réponse :

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation $f(x)^2 = 1$ admet pour solution 1 ou -1, donc f est constante égale à -1 ou 1.

Exercice 3

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout} \quad n \geq 0, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, donner la valeur de sa limite.

Réponse :

On commence par montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la proposition $\mathcal{H}_n$ définie par :

$$\mathcal{H}_n : \text{« pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0 \text{ »}.$$

- *Comme $u_0 = 1$, $\mathcal{H}_0$ est vraie.*
- *On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et, par hypothèse de récurrence $u_n \geq 0$, on en déduit que u_{n+1}, donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.*
- *Par le principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Or, si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n + 1 \geq 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, elle converge. On note ℓ sa limite. Par continuité de $x \mapsto 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$, ℓ vérifie l'équation $\ell = 2\ell + 1$, soit $\ell = -1$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers -1.

Tournez la page S.V.P.

Partie 2 : Questions sur le document 1 joint au sujet

Les questions ci-dessous portent sur le **Document 1** concernant la méthode de Gauss, les formes linéaires et les hyperplans. Les notations utilisées ici sont les mêmes que dans le document. Les questions sont posées dans l'ordre chronologique de la lecture du document.

1 Méthode de Gauss

Question 1. Échelonner, à l'aide d'opérations élémentaires dûment détaillées, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 2. Démontrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène $AX = 0_{\mathbb{R}^m}$, où $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Question 3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer, en fonction du réel λ, le rang de $U - \lambda I_3$, où I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3$. En déduire les valeurs propres de U.

Question 4. Démontrer la Proposition 3 (*Solutions d'un système linéaire non homogène*).

Question 5. Quel est le point en commun entre la Proposition 3 et la résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$?

Question 6. Démontrer le Théorème 2 (*Caractérisation d'une combinaison linéaire d'équations*) en utilisant les résultats qui le précèdent.

Question 7. Dans le Théorème 2, obtient-on un résultat valide si l'on remplace l'assertion :

« Si le système S' admet les mêmes solutions que S alors l'équation (E) est une combinaison linéaire des équations de S. »

par

« Le système S' admet les mêmes solutions que S si, et seulement si, l'équation (E) est une combinaison linéaire des équations de S. » ?

Justifier la réponse.

Question 8. Soit le plan P de l'espace passant par l'origine du repère et engendré par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}+2\vec{k}$. On sait que $M \in P$ si, et seulement si, $(\overrightarrow{OM}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}+2\vec{k})$ est une famille liée. À l'aide d'un calcul de rang, démontrer que $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z-2y=0\}$.

Question 9. Soient deux plans distincts P_1 et P_2 d'équation respective

$$3x+4y-z=1 \quad \text{et} \quad x+y+z=5.$$

À l'aide de la méthode de Gauss, démontrer que l'intersection de ces deux plans est une droite dont on déterminera un point et un vecteur directeur.

Question 10. Comme proposé dans la Remarque 5, retrouver, à l'aide du Théorème 1 (*Rouché-Fontené*), les différents cas possibles d'intersections de deux plans quelconques $P_1 \cap P_2$ dans l'espace et les illustrer par des croquis en perspective.

Question 11.

i) Prouver la Remarque 6 (*Produit vectoriel*).

ii) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les plans d'équations $(1-m)x+(2+m)y-z=3$ et $2x+(4-2m)y+(m-2)z=m$ sont-ils parallèles ?

iii) Parmi la ou les valeurs du paramètre m trouvée(s) ci-dessus, existe-t-il des cas où les plans sont confondus ?

Question 12. Soient P_1 et P_2 deux plans d'équation respective (E_1) et (E_2). Expliquer pourquoi, si l'on suppose P_1 et P_2 non parallèles, alors cela permet d'affirmer que l'équation de la forme $\alpha(E_1)+\beta(E_2)$, où α et β sont deux réels non tous les deux nuls, représente toujours un plan.

2 Formes linéaires et hyperplans

Question 13.

i) Démontrer que $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

ii) Démontrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, pour tout couple $(A,B) \in {\mathcal{M}_n}^2$.

iii) Donner un exemple de forme linéaire ϕ sur $\mathcal{M}_n$ qui ne vérifie pas la propriété que $\phi(AB) = \phi(BA)$ pour tout couple $(A,B) \in {\mathcal{M}_n}^2$. *On pourra chercher un exemple avec $n=2$.*

iv) Montrer qu'une forme linéaire ϕ définie sur $\mathcal{M}_n$ vérifiant :

$$\forall (A,B) \in {\mathcal{M}_n}^2, \quad \phi(AB) = \phi(BA)$$

est proportionnelle à tr. *On pourra utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_n$.*

Question 14. En utilisant tr, montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B dans $\mathcal{M}_n$ telles que $AB - BA = I_n$ avec I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n$.

Question 15. Une forme linéaire non nulle sur E est-elle toujours injective ? Toujours surjective ? Justifier.

Tournez la page S.V.P.

Question 16. On note $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{2}X(X-1), \frac{1}{2}(X-1)(X-2), -X(X-2)\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et préciser sa base duale.

Question 17. Donner une preuve de la Proposition 5 (*Base de l'espace dual*) en utilisant les résultats qui la précèdent.

Question 18. Rédiger une démonstration du Théorème 4 (*Hyperplans et noyaux de formes linéaires*) à partir des *Commentaires sur la démonstration.*

Question 19.

— Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Démontrer qu'il existe un unique vecteur $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

— Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. En utilisant le Théorème 5 (*Intersection d'hyperplans*), démontrer qu'il existe $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n-k,n}$ telle que : pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$x \in F \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = 0 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 + \cdots + a_{n-k,n}x_n & = 0 \end{cases}$$

Question 20. Soit P le plan passant par l'origine du repère et engendré par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ considéré dans la Question 8. Déterminer une équation cartésienne du plan affine $\mathcal{P}$ parallèle à P et passant par le point de coordonnées $(1, 2, -1)$.

Partie 3 : Questions sur le **document 2** joint au sujet

Les questions ci-dessous portent sur le **Document 2**, à propos de l'intersection de plans (dans $\mathbb{R}^3$). Dans le Document 2 le repère n'est pas indiqué. On confondra un point avec ses coordonnées dans ce repère, dans lequel on supposera que $I = (1, 0, 1), J = (1, 1, 0), K = (0, 1, 1)$ et $F = (1, 1, 1)$. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Question A. Déterminer les coordonnées des sommets du cube $ABCDEFGH$ et vérifier en particulier qu'elles sont toutes égales à 1 ou -1.

Question B. Déterminer une équation cartésienne des plans (ABC) et (IJK). Quel est le faisceau de plans engendré par (ABC) et (IJK) ?

Question C. Déterminer les coordonnées des points N et M.

Question D. Soient $O = (0, 0, 0)$ et $P = (0, 1, -1)$. Démontrer que le plan (IJP) contient O.

Question E. Déterminer l'intersection du plan (IJP) et de la droite (EH).

Question F. Puisque le plan (IJP) contient O, il peut être vu comme un plan vectoriel. Déterminer une forme linéaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\ker(\phi) = (IJP)$. Cette forme est-elle unique ?

Question G. L'hypothèse « $F = (1, 1, 1)$ », est-elle nécessaire ou peut-elle être déduite de l'assertion « $I = (0, 1, 1), J = (1, 1, 0), K = (1, 0, 1)$ » ?

FIN DES TROIS PARTIES ET DES QUESTIONS

Tournez la page S.V.P.

Document 1 : Extraits de cours sur la méthode de Gauss, les formes linéaires et les hyperplans

Notations

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- Dans tout le document n et m désignent deux entiers naturels non nuls et les espaces vectoriels sont des espaces vectoriels sur le corps des nombres réels.
- Soient n et m deux entiers naturels non nuls ; l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}$ est l'ensemble des matrices à coefficients réels, à m lignes et n colonnes. Si $n = m$ on note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrice carrées à coefficients réels. Dans le texte, on pourra identifier $\mathcal{M}_{m,1}$ avec $\mathbb{R}^m$.
- Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors on note $\dim(E)$ sa dimension. Si $k \in \mathbb{N}^*$ et si $u_1, \ldots, u_k$ sont k vecteurs de E, $\mathcal{V}ect(u_1, \ldots, u_k)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_k$ et le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_k)$, noté $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_k)$, est la dimension de $\mathcal{V}ect(u_1, \ldots, u_k)$.

1 Méthode de Gauss - Faisceaux de plans

La méthode de Gauss appliquée à la résolution des systèmes est considérée comme connue. Toutefois nous rappelons ici les opérations de base nécessaires à l'algorithme et les résultats qu'implique la méthode. Rappelons d'abord quelques définitions.

Définition 1 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ est dite* échelonnée *quand le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des lignes nulles. Le premier terme non nul de chaque ligne non nulle est appelé un* pivot.

Définition 2 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ est dite* réduite *si elle est échelonnée et si tous ses pivots valent 1.*

Définition 3 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}$. On appelle rang de A le rang de la famille de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$ formée par les lignes de A. On le note* $\mathrm{rg}(A)$.

Remarque 1 *Rappelons ici que le rang d'une matrice est le même que celui de sa transposée et donc* $\mathrm{rg}(A) \leq \min(m, n)$.

Définition 4 *On appelle opération élémentaire sur une matrice l'une des opérations suivantes :*
- *échanger deux lignes ;*
- *multiplier une ligne par un nombre réel non nul ;*
- *ajouter à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes.*

Proposition 1 *Appliquer à une matrice l'une de ces opérations ne change pas son rang.*
Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de lignes non nulles qu'elle contient.

Remarque 2 *Les opérations sont réversibles.*

Proposition 2 *Une matrice carrée (d'ordre n) est inversible si et seulement si elle est de rang maximal (c'est-à-dire de rang n).*

Le rang d'une matrice n'est modifié par aucune opération élémentaire, ce qui conduit à un **algorithme d'échelonnement** qui utilise de manière stratégique les opérations élémentaires et qui transforme une matrice quelconque en une matrice échelonnée de même rang.

1.1 Applications de la notion de rang à la résolution des systèmes

On s'intéresse ici à la résolution des systèmes linéaires de la forme $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathbb{R}^m$. On distingue deux cas.

Cas des systèmes linéaires homogènes : $B = 0_{\mathbb{R}^m}$

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$. Notons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les n vecteurs colonnes de la matrice A.
Résoudre le système $AX = 0_{\mathbb{R}^m}$ revient à trouver des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_nC_n = 0_{\mathbb{R}^m}$. Par conséquent :
- si $\text{rg}(A) = n$, c'est-à-dire si les n vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants, le système admet $0_{\mathbb{R}^n}$ pour solution unique.
- si $\text{rg}(A) = r < n$, c'est-à-dire si les n vecteurs colonnes de A sont linéairement dépendants, alors l'espace vectoriel des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$.

Cas des systèmes linéaires non homogènes : $B \neq 0_{\mathbb{R}^m}$

Dans la suite, on note $AX = B$ un système linéaire non homogène où $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathbb{R}^m$ avec $B \neq 0_{\mathbb{R}^m}$.

Proposition 3 (Solutions d'un système linéaire non homogène) *On suppose que le système $AX = B$ possède au moins une solution. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ une de ces solutions.*
L'ensemble des solutions du système est l'ensemble $\{X_0 + u \,|\, u \in E_0\}$ où E_0 est l'ensemble des solutions du système homogène associé $AX = 0_{\mathbb{R}^m}$.

Bilan et méthode de Gauss

Un système linéaire peut donc avoir 0, 1 ou une infinité de solutions. Pour énoncer un théorème plus précis, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 5 *On appelle* matrice augmentée *du système $AX = B$ la matrice $(A|B) \in \mathcal{M}_{m,n+1}$.*

Tournez la page S.V.P.

Théorème 1 (Rouché-Fontené) *Le système $AX = B$ défini plus haut est :*

- *incompatible (sans solution) si* $\mathrm{rg}(A|B) > \mathrm{rg}(A)$
- *compatible et $n - r$ fois indéterminé si* $\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}(A) = r$. *Si $r = n$ alors la solution est unique. Si $B = 0_{\mathbb{R}^m}$ alors, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$.*

Remarque 3 *Dans le cas d'un système compatible, r inconnues s'expriment de façon unique en fonction des $n - r$ autres, prises comme paramètres.*

Méthode de Gauss de résolution d'un système linéaire $AX = B$ **:** on applique l'algorithme d'échelonnement à la matrice augmentée $(A|B)$. On obtient alors un système échelonné équivalent (ayant les mêmes solutions) que le système de départ (puisque les opérations sont réversibles).

Théorème 2 (Caractérisation d'une combinaison linéaire d'équations) *Soit S un système de m équations à n inconnues dont l'ensemble des solutions est non vide, et soit S' un système constitué des équations de S auxquelles on a rajouté une équation (E) de mêmes inconnues que S. Si le système S' admet les mêmes solutions que S alors l'équation (E) est une combinaison linéaire des équations de S.*

Commentaires sur la démonstration. La preuve de ce théorème peut se déduire de l'algorithme de Gauss.

1.2 Applications : droites, plans et faisceaux de plans

Dans le plan

On se place ici **dans le plan** rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soient $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$. On considère deux droites d'équations respectives $a_1x + b_1y = c_1$ et $a_2x + b_2y = c_2$ en notant (x, y) les coordonnées d'un point du plan dans le repère.
On note la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ et la matrice A' augmentée $A' = \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$.

Remarque 4
En étudiant les différentes valeurs possibles pour les rangs des matrices A et A', et en utilisant le Théorème 1 (Rouché-Fontené), on peut retrouver les trois différents cas possibles pour l'intersection de ces deux droites.

Dans l'espace

On se place ici **dans l'espace** rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On rappelle qu'un plan peut être défini à l'aide d'une équation de la forme

$$(E) \quad ax + by + cz = d$$

où a, b, c sont des réels non tous nuls, et en notant (x, y, z) les coordonnées d'un point de l'espace dans le repère.

Dans la suite, P_1 et P_2 désignent deux plans distincts d'équation respective (E_1) et (E_2).

Remarque 5 *On peut, à titre d'exercice, retrouver à l'aide du Théorème 1 (Rouché-Fontené) les différents cas possibles d'intersections $P_1 \cap P_2$.*

Remarque 6 (Produit vectoriel) *Le produit vectoriel fournit un outil efficace pour savoir si deux plans P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^3$ sont parallèles. Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont des vecteurs normaux à respectivement P_1 et P_2, P_1 et P_2 sont parallèles si, et seulement si, $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \vec{0}$.*

Définition 6 (Faisceau de plans) *On appelle faisceau de plans engendré par P_1 et P_2 l'ensemble des plans qui ont une équation de la forme $\alpha(E_1) + \beta(E_2)$, où α et β sont deux réels non tous les deux nuls. On le note $\mathcal{F}(P_1, P_2)$.*

Si par exemple (E_1) est l'équation $z = 1$ et (E_2) est l'équation $x + y = 0$, $\mathcal{F}(P_1, P_2)$ est l'ensemble des plans dont une équation est de la forme $\alpha z + \beta x + \beta y = \alpha$.

Théorème 3 *Si P_1 et P_2 sont sécants, ce faisceau est l'ensemble de tous les plans contenant la droite $P_1 \cap P_2$. Dans ce cas, les plans P_1 et P_2 appartiennent au faisceau $\mathcal{F}(P_1, P_2)$.*

2 Formes linéaires, hyperplans et faisceaux d'hyperplans

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. Ces notions sont supposées connues. Toutefois, rappelons qu'une somme de deux sous-espaces vectoriels est une somme directe lorsque leur intersection est réduite au vecteur nul.
Rappelons également que l'on peut écrire que (Théorème du rang)

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$$

avec les notations consacrées où $\ker(f)$ désigne le noyau de f (l'ensemble des éléments de E qui ont pour image 0_F par f) et où $\mathrm{rg}(f)$ est la dimension de l'image de f.

Dans toute la suite E désigne un espace vectoriel de dimension n.

Remarque 7 *Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, le Théorème 1 [Rouché-Fontené] fournit le théorème du rang ci-dessus.*

Dans la partie **1-Méthode de Gauss-Faisceaux de plans** nous utilisons des équations de droites dans $\mathbb{R}^2$ et de plans dans $\mathbb{R}^3$ et des systèmes d'équations pour caractériser des droites de $\mathbb{R}^3$. La suite de ce document nous assure que nous pouvons toujours le faire.

Définition 7 *On dit que φ est une forme linéaire sur E s'il s'agit d'une application linéaire sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E.*

Remarque 8 *E^* est un espace vectoriel réel de dimension n et est appelé l'espace dual de E.*

Tournez la page S.V.P.

Exemple 1
1) Si $E = \mathbb{R}^3$ et si a, b, c sont trois réels, l'application définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) = ax + by + cz$$

est une forme linéaire.
2) L'application *trace*, notée tr, qui à une matrice de $\mathcal{M}_n$ associe la somme de ses coefficients diagonaux est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$.

Proposition 4 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note pour $x \in E$, x_i sa i^{e} coordonnée dans la base $\mathcal{B}$. Les applications φ_i définies par $\varphi_i(x) = x_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, sont des formes linéaires de E^*.*

Toujours avec les notations introduites ci-dessus :

Proposition 5 (Base de l'espace dual)
1) $\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$.
2) $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \varphi_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
3) La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^*, appelée base duale de E^* associée à la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Commentaires sur la démonstration. Pour démontrer 3) on peut utiliser la remarque 8.

Définition 8 *Un hyperplan vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.*

Exemple 2
Un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est donc une droite vectorielle et un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ un plan vectoriel engendré par deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 6 *Soit H un hyperplan vectoriel de E et $u \notin H$. Alors $E = H \oplus \mathcal{V}ect(u)$.*

Théorème 4 (Hyperplans et noyaux de formes linéaires) *Soit H un sous-espace vectoriel de E.*
1) H est un hyperplan vectoriel de E si, et seulement si, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
2) Soient φ et ψ deux formes linéaires, non nulles, éléments de E^*. Si $H = \ker(\varphi) = \ker(\psi)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

Commentaires sur la démonstration. Pour la démonstration de 1) il y a deux implications à démontrer :
a) Si $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0_{E^*}$, et si $H = \ker(\varphi)$, alors $\dim(H) = \dim(E) - \text{rg}(\varphi)$. Reste à argumenter le fait que $\text{rg}(\varphi) = 1$.
b) Si maintenant H est un hyperplan de E, on peut considérer une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H et la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Si on note $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ la base duale associée à la base

$(e_1, \ldots, e_n)$ et si $x \in H$, alors on remarque que $x = \varphi_1(x)e_1 + \cdots + \varphi_{n-1}(x)e_{n-1}$.

Pour la démonstration de 2), si $H = \ker(\varphi) = \ker(\psi)$, il suffit de prendre $a \notin H$ et poser $\lambda = \dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}$.

Autrement dit, tout hyperplan vectoriel est caractérisé par une équation et cette équation est unique à un facteur multiplicatif près.

Théorème 5 (Intersection d'hyperplans) *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors, F est l'intersection de $n-k$ hyperplans vectoriels.*

Ce dernier résultat permet de considérer un sous-espace vectoriel de E comme l'ensemble des solutions d'un système d'équations et permet, dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, de faire la liaison avec la méthode de Gauss.

Remarque 9 *Comme dans le cas des droites et des plans, il existe la notion d'hyperplan affine. On appelle hyperplan affine tout translaté $H + a$ d'un hyperplan vectoriel H de E par un vecteur $a \in E$.*

Exemple 3 [Droites affines de $\mathbb{R}^2$] Soit $E = \mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la droite affine $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1, -2)$ et passant par le point $M_0\ (-1, -3)$. Il s'agit d'un hyperplan affine, translaté de la droite vectorielle D de vecteur directeur $(1, -2)$.
Pour déterminer une équation cartésienne de D, on peut considérer la droite vectorielle D comme étant le noyau d'une forme linéaire, que l'on trouve en utilisant la démonstration du Théorème 4.
On a :

$$\forall \vec{v} \in D\ ,\ \vec{v} = \alpha\vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}.$$

On peut compléter $\vec{u}$ en une base de $\mathbb{R}^2$. Prenons $\vec{\jmath}$ comme deuxième vecteur. On note la base duale (φ_1, φ_2) et on a :

$$\forall \vec{v} \in D, \quad \vec{v} = \varphi_1(\vec{v})\vec{u} \quad \text{et} \quad \varphi_2(\vec{v}) = 0.$$

Or

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{w} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

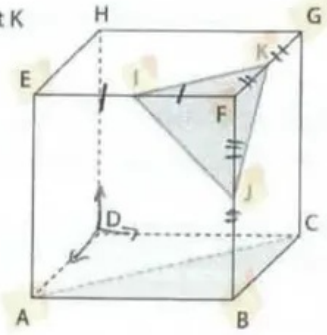
Comme $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, il vient que $\vec{\imath} = \vec{u} + 2\vec{\jmath}$ et on peut donc écrire $\vec{w} = x\vec{u} + (2x + y)\vec{\jmath}$.
Finalement, $\vec{w} \in D$ si, et seulement si, $2x + y = 0$.
La forme linéaire φ_2 est définie par $\varphi_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2x + y$.
Comme le point M_0 appartient à $\mathcal{D}$, une équation de $\mathcal{D}$ est $2x + y + 5 = 0$. La droite $\mathcal{D}$ est la droite affine translatée de la droite vectorielle D par le vecteur $-5\vec{\jmath}$.

Tournez la page S.V.P.

Document 2 : intersections de plans, extrait d'un manuel [1]

ÉNONCÉ

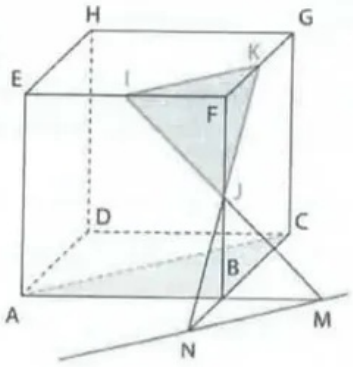
ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [EF], [FB] et [FG]. Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).



SOLUTION

• Dans le plan (ABF), les droites (AB) et (IJ) sont coplanaires et non parallèles. Elles sont donc sécantes en un point M. Ce point M appartient à (AB) donc au plan (ABC) et à (IJ) donc au plan (IJK). De même, dans le plan (BCF), les droites (BC) et (JK) sont sécantes en un point N qui appartient aux plans (ABC) et (IJK). On en déduit que la droite (MN) est incluse dans les plans (ABC) et (IJK).

• De plus, I n'appartient pas au plan (ABC) donc les plans (ABC) et (IJK) ne sont pas confondus. Les plans (ABC) et (IJK) sont donc sécants suivant la droite (MN).



MÉTHODE

Pour déterminer l'intersection de deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, on peut :

- trouver deux points M et N communs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, chacun étant le point d'intersection d'une droite de $\mathcal{P}$ et d'une droite de $\mathcal{P}'$ coplanaires et non parallèles ;
- montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas confondus.

On peut alors conclure que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant la droite (MN).

1. TS, collection MATH'X, (Didier Ed. 2016).